Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
9 класс

▷ **1.** Доказать, что при неравных положительных a, b и c:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} > \frac{a+b+c}{3}$$

Решение: Попробуем доказать от противного. Из данного уравнения мы имеем:

$$3(a^3+b^3+c^3) > (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$$

или

$$3(a^3+b^3+c^3) > a^3+ab^2+ac^2+a^2b+b^3+bc^2+a^2c+b^2c+c^3$$

Отсюда:

$$2(a^3+b^3+c^3) > (a^2b+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(a^2c+ac^2)$$

или

$$(a^3+b^3)+(b^3+c^3)+(a^3+c^3) > ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)+(a+c)(a^2-ac+c^2) >$$
$$> ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$$

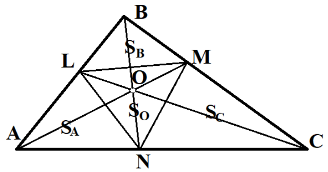
Отсюда, по перенесении всех членов в левую часть, получим:

$$(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2 > 0$$

Но это неравенство очевидно при положительных и неравных между собой числах a,b и c. Отсюда, производя преобразования в обратном порядке, получим требуемое неравенство.

▷ **2.** Основания биссектрис треугольника ABC со сторонами a, b, c соединены прямыми. Найти отношение площади каждого из четырёх полученных треугольников к площади данного.

Решение:



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a}$$

Беря производные пропорции, получим:

$$\frac{AN}{AN+NC} = \frac{AN}{b} = \frac{c}{a+c};\ AN = \frac{bc}{a+c};$$

$$\frac{AN+NC}{NC} = \frac{b}{NC} = \frac{a+c}{a};\ NC = \frac{ab}{a+c}.$$

Аналогично получим:

$$AL = \frac{bc}{a+b};\ LB = \frac{ac}{a+b};\ BM = \frac{ac}{b+c};\ MC = \frac{ab}{b+c}.$$

Обозначив площадь треугольника ABC через S и применяя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, найдём:

$$\frac{S_a}{S} = \frac{AL\cdot AN}{AC\cdot AB} = \frac{cb}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c} : bc = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично получим:

$$\frac{S_B}{S} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)};$$

$$\frac{S_C}{S} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)}.$$

Не трудно видеть, что последнее равенство можно было получить из предпоследнего круговой подстановкой. Сложим их.

$$\frac{S_A+S_B+S_C}{S} = \frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Найдём, наконец $\frac{S_O}{S}$

$$\frac{S_O}{S} = \frac{S-(S_A+S_B+S_C)}{S} = 1-\frac{S_A+S_B+S_C}{S} = 1-\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

После очевидных преобразований из предыдущего равенства получим:

$$\frac{S_O}{S} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$\triangleright$ **3.** Найти число, содержащее только множители 2 и 3 и обладающее тем свойством, что число всех делителей его куба в 7 раз больше делителей самого числа.

Решение: Согласно условию искомое число x имеет вид:

$$x = 2^m 3^n.$$

Тогда

$$x^3 = 2^{3m} 3^{3n}.$$

Число всех делителей этих чисел будет

$$(m+1)(n+1) \text{ и } (3m+1)(3n+1).$$

По условию:

$$(3m+1)(3n+1) = 7(m+1)(n+1). \tag{1}$$

Из последнего равенства следует, что или $3m+1$ или $3n+1$ должно делиться на 7.

Пусть $3m+1 = 7t$, где t - натуральное число и $m = 7k+a$, где $a < 7$. Тогда

$$3m+1 = 21k + 3a + 1 = 7t$$

Отсюда заключаем, что $3a+1$ должно делится на 7, что может быть лишь при $a = 2$. Значит m имеет вид

$$m = 7k + 2.$$

Подставив это выражение в (1), получим:

$$(21k+7)(3n+1) = 7(7k+3)(n+1),$$

или

$$(3k+1)(3n+1) = (7k+3)(n+1). \tag{2}$$

Из (2) определим n. Найдем

$$n = \frac{2k+1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

Но так как n число целое, то может быть только $k = 1$. Отсюда

$$n = 3 \text{ и } m = 7k + 2 = 9.$$

Искомое число

$$x = 2^9 \cdot 3^3 = 13824.$$

Так как уравнение (1) симметрично относительно m и n, то, очевидно, предположив, что $3n+1$ делится на 7, найдём

$$m = 3 \text{ и } n = 9.$$

Получим второе решение:

$$x = 2^3 \cdot 3^9 = 157464.$$

Ответ: 13824 и 157464.

$\triangleright$ **4.** Построены: 4-угольник, 5-угольник, 6-угольник и т.д.
Число диагоналей во всех многоугольниках 800. Сколько построено многоугольников?

Решение: Пусть число многоугольников равно x. Тогда последний многоугольник будет иметь $x+3$ стороны. Число диагоналей в многоугольнике выражается формулой:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Давая здесь n значения 4,5,6,..., $x+3$, получим по условию:

$$\frac{4(4-3)}{2} + \frac{5(5-3)}{2} + \cdots + \frac{(x+3)\mid(x+3)-3\mid}{2} = 800.$$

или

$$\left[4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + (x+3)^2\right] - 3\left[4 + 5 + 6 + \cdots + (x+3)\right] = 1600. \tag{1}$$

Но по известным формулам:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (x+3)^2 = \frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6}$$

$$4 + 5 + 6 + \cdots + (x+3) = \frac{(x+7)x}{2}.$$

Следовательно, уравнение (1) мы можем переписать в виде:

$$\frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6} - 1^2 - 2^2 - 3^2 - \frac{3x(x+7)}{2} = 1600,$$

или

$$(x+3)(x+4)(2x+7) - 9x(x+7) = 9684.$$

После обычных упрощений, получим:

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 4800 = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$x^3+6x^2+5x-4800 = x^3-15x^2+21x^2-315x+320x-4800 =$$

$$= x^2(x-15)+21x(x-15)+320(x-15) = (x-15)(x^2+21x+320).$$

Итак, имеем:

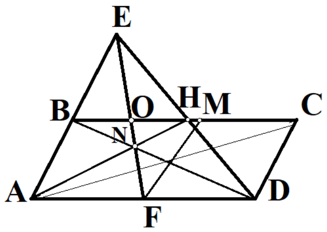
$$(x-15)(x^2+21x+320) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) даёт одно действительное значение для x, именно

$$x = 15.$$

▷ **5.** При помощи одной линейки разделить параллелограм на две части, площади которых относятся как 3:1.

Решение: На продолжении стороны AB возьмём произольную точку E и



соединим её с с D.

Разделим парллелограмм сначала на две равновеликие части. Докажем, что мы можем опустить прямую из точки E, , которая разделит сторону AD пополам.

Параллельные прямые AD и BH рассечены прямыми EA, EF и ED на пропорциональные части. Отсюда:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BO}{OH}.$$

Из подобия треугольников ANF и HNO имеем:

$$\frac{AF}{OH} = \frac{NF}{NO}.$$

Из подобия треугольников FND и ONB:

$$\frac{NF}{NO} = \frac{FD}{BO}.$$

$$\frac{AF}{OH} = \frac{FD}{BO}.$$

$$\frac{AF}{FD} = \frac{OH}{BO}$$

$$\frac{AF^2}{FD^2} = 1,$$

откуда

$$\frac{AF}{FD} = 1,\ AF = FD.$$

Прямая FM, проведённая через точку а и через точку пересечения диагоналей параллелограма, и будет искомой. Далее делим на две равновеликие части один из полученных параллелограмов, таким образом, решая задачу.

▷ **6.** Приведите пример многочлена $P(x)$, такого, что $P(20) = 23$, $P(23) = 20$, который во всех рациональных точках интервала $(20;23)$ принимает иррациональные значения.

Решение: Добавим иррациональный множитель для того, чтобы при рациональных $x \in (20;23)$ многочлен $P(x)$ принимал иррациональные значения. Однако, для того, чтобы при $x \in 20;23$ значения не было иррациональным, приравняем другие множители к нулю. Чтобы получить необходимое значение добавим параметры a и b.

Получим:

$$P(x) = \sqrt{2}(x-20)(x-23) - ax + b.$$

Подставляя значения x, получаем систему, при решении которой находим параметры a и b.

$$\begin{cases} \sqrt{2}(20-20)(20-23) - 20a + b = 23 \\ \sqrt{2}(23-20)(23-23) - 23a + b = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20a + b = 23 \\ -23a + b = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 43 \end{cases}$$

Ответ: $P(x) = \sqrt{2}(x-20)(x-23) - x + 43.$

▷ **7.** Докажите, что уравнение $x^3 - y^3 = 2023$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение:

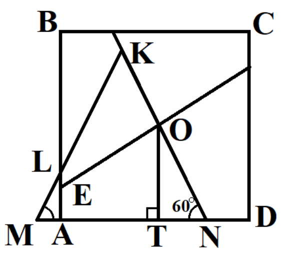
$$x > y$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

$x-y \leqslant 12$	$3xy(x-y)$
$12^3=1728$	295 не делится 3
$11^3=1331$	692 не делится 3
$10^3=1000$	$1023:3=341 \quad xy\cdot 10=341\emptyset$
$9^3=729$	1294 не делится 3
$8^3=512$	1511 не делится 3
$7^3=343$	$1680:3=560 \quad xy\cdot 7=560 \quad xy=80\emptyset$
$6^3=216$	1807 не делится 3
$5^3=125$	1898 не делится 3
$4^3=64$	$1959:3=653 \quad xy\cdot 4=653\emptyset$
$3^3=27$	1996 не делится 3
$2^3=8$	2015 не делится 3
$1^3=1$	$2022:3=674 \quad xy=674\emptyset$

▷ **8.** В квадрате со стороной 12 расположены 2023 точки. Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 11, в котором расположено по крайней мере 500 из этих точек.

Решение: Разобьём исходный квадрат на четыре одинаковые части так, как показано на рисунке.



По принципу Дирихле, по крайней мере в одной из них находится не менее 500 точек. Докажем, что $AEON$ можно накрыть равносторонним треугольником MNK. Пусть O - центр квадрата $ABCD$ со стороной 12, T - середина стороны AD, а равносторонний треугольник MNK со стороной 111 расположен так, как показано на рисунке. Тогда $ND = TD - TN = TD - OT \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 6 - 6/\sqrt{3}$, $MA = MN - AN = MN - (AD - ND) = 5 - 6/\sqrt{3}$. Следовательно, $AL = MA \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} - 6 > ND = AE$, и поэтому треугольник MKN полностью покрывает четырёхугольник $AEON$.

▷ **9.** Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

если α, β, γ углы некоторого треугольника.

Решение:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta) + \sin^2\gamma = \\
&= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin^2\gamma = \\
&= 1 - \sin\gamma\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = \\
&= 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \\
&= 1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

Но если 2α, 2β, 2γ - углы некоторого треугольника, то, как известно,

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{1}{8}$$

Следовательно,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{9}{8}.$$

Ответ: $\frac{9}{8}$.

▷ **10.** В плоскости имеются a параллельных прямых, пересечённых b параллельными прямыми. Сколько при этом образовалось параллелограмов?

Решение: Для простоты допустим, что прямые пересекаются под прямым углом. Тогда стороны прямоугольников будут служить их основанием и высотой. Подсчитаем, сколько получится прямоугольников с некоторым основанием k и высотой l. Очевидно, что левая нижняя вершина такого прямоугольника может лежать лишь на 1-й, 2-й, ..., $a-k$-й из вертикальных прямых (так как если взять эту вершину на $a-k+1$-й прямой, то правая вершина будет уже за a-й прямой). Другими словами, если принять нашу сеть за координатну, то абсцисса x левой нижней вершины прямоугольника может принимать $a-k$ значений от 1 до $a-k$.
Точно так же найдем, что ордината y той же вершины может принимать $b-l$.
Комбинируя эти значения, получим всего $(a-k)(b-l)$ прямоугольников со сторонами k и l.
Но k может принимать значенил от 1 до $a-1$, а l - от 1 до $b-1$. Оставляя, пока l фиксированным и давая k значения 1, 2, ..., $a-1$, получим

$$(b-1)\left[(a-1)+(a-2)+(a-3)+\cdots+2+1\right] = (b-l)\frac{a(a-1)}{2}$$

прямоугольников. Наконец, давая l значения 1,2, ..., $b-1$ и складывая результаты, получим всего

$$[(b-1)+(b-2)+\cdots+2+1]\,\frac{a(a-1)}{2}=\frac{a(a-1)b(b-1)}{4}$$

прямоугольников. Ход рассуждений остаётся абсолютно тем же, если вместо прямоугольников возьмём параллелограмы. Присланные решения отличаются исключительной длиннотой.